Conjuntos numéricos: naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais

Objetivo
Aprender os conjuntos numéricos, seus elementos e suas relações

Se liga
Para esse conteúdo é legal que você tenha um conhecimento básico de matemática, como operações com frações e decimais

Curiosidade
Você sabia os conjuntos numéricos surgiram da necessidade do homem representar quantidades? Começaram com a contagem dos naturais e com a intensificação da atividade comercial foram necessários a criação de outros conjuntos, como por exemplos, dos inteiros para tratar de dívidas com valores negativos

Teoria

Ao estudarmos os conjuntos numéricos, estamos dando um foco num segmento do estudo dos conjuntos. Assim, todas as operações entre os conjuntos também são aplicáveis nesse segmento.

Conjunto dos Números Naturais ($\mathbb{N}$)

O primeiro conjunto numérico a ser estudado é o conjunto dos naturais, representados por "**N**" que surgiu a partir do momento que foi sentido a necessidade da contagem de elementos.

N = {0, 1, 2, 4, 5, 6, ...}
N* = {1, 2, 3, 4, 5, 6, ...}

Obs: A notação "*" simboliza o conjunto sem o elemento nulo.

Conjunto dos Números Inteiros ($\mathbb{Z}$)

O conjunto dos números inteiros, representado por "**Z**", surgiu a partir do momento que surgiu a ideia de dívida, assim, entrando os números negativos.

Z = {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...}

Alguns subconjuntos são destacáveis:

1. Conjunto $\mathbb{Z}^*$ dos números inteiros nao nulos:

$$\mathbb{Z}^* = \{x \in \mathbb{Z} | x \neq 0\} = \{\dots, -3, -2, 1, 1, 2, 3, \dots\}$$

2. Conjunto $\mathbb{Z}_{+}^{*} = \mathbb{N}^{*}$dos números inteiros positivos não nulos:

$$\mathbb{Z}_{+}^{*} = \mathbb{N}^{*} = \{x \in \mathbb{Z} | x > 0\} = \{1,2,3, \dots\}$$

3. Conjunto $\mathbb{Z}_{+} = \mathbb{N}$ dos números inteiros não negativos:

$$\mathbb{Z}_{+} = \mathbb{N} = \{x \in \mathbb{Z} | x \geq 0\} = \{0,1,2,3, \dots\}$$

4. Conjunto $\mathbb{Z}_{-}^{*}$os números negativos não nulos:

$$\mathbb{Z}_{-}^{*} = \{x \in \mathbb{Z} | x < 0\} = \{\dots, -3, -2, -1\}$$

5. Conjuntos $\mathbb{Z}_{-}$dos números inteiros não positivos:

$$\mathbb{Z}_{-} = \{x \in \mathbb{Z} | x \leq 0\} = \{\dots, -3, -2, -1,0\}$$

Conjunto dos Números Racionais ($\mathbb{Q}$):

O conjunto dos racionais surgiram quando houve necessidade de representar uma parte de um inteiro e é todo número da forma $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$, com $b \neq 0$. Ou seja, são razões (quocientes) entre dois números inteiros. A definição formal é: $\mathbb{Q} = \left\{x = \frac{a}{b} | a \in \mathbb{Z} \text{ e } b \in \mathbb{Z}^{*}\right\}$

Alguns exemplos:

- $0 = \frac{0}{1}$
- $-2 = \frac{-2}{1}$
- $\frac{1}{2}$

Da mesma forma que temos $\mathbb{Z}^{*}, \mathbb{Z}_{+}^{*}, \mathbb{Z}_{+}, \mathbb{Z}_{-}^{*}, \mathbb{Z}_{-}$, temos também $\mathbb{Q}^{*}, \mathbb{Q}_{+}^{*}, \mathbb{Q}_{+}, \mathbb{Q}_{-}^{*}, \mathbb{Q}_{-}$ com definições análogas.

Obs: Lembrando que entre dois números racionais há infinitos números racionais.
Obs$_2$: Dízimas periódicas são racionais pois podem ser escritas sob a forma de fração.

Dízima periódica

Número decimal que possui uma repetição periódica e infinita de termos (período) , mas não tem uma representação exata. São classificadas como simples e compostas:

- **Simples**: o período começa logo após a vírgula. Exemplo: 0,3333... , 0,121212.... e 1,3333...
- **Composta**: Existe uma parte não periódica entre a virgula e o período: Exemplo: 0,0222..., 1,125555...

Elas podem ser representas como $0,\overline{3}$ e $1,12\overline{5}$ com a barra indicando onde começa o período. Com a dízima periódica dá para descobrir a fração que a gerou, essa chamada fração geratriz.

- Simples. Exemplo: 0,3333...

$$x = 0,333\ldots \qquad , \qquad 10x = 3,333\ldots$$
$$10x = 3,333\ldots \qquad - \qquad x = 0,333\ldots$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad}$$
$$9x = 3$$
$$x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Logo, a fração geratriz é $\frac{1}{3}$.

- Composta. Exemplo: 1,12555....

$$x = 1,12555\ldots \qquad , \qquad 10000x = 11255,555\ldots$$
$$100x = 112,555\ldots \qquad - \qquad 100x = 112,555\ldots$$
$$10000x = 11255,555\ldots \qquad \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$9900x = 11143$$
$$x = \frac{11143}{9900}$$

Conjunto dos Números Irracionais (I ou $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ou $\overline{Q}$)

Os números irracionais são números que não podem ser escritos sob a forma de fração pois são números decimais infinitos e não periódicos.

Como exemplos de números irracionais podemos ter:

- π
- $\sqrt{2} \approx 1{,}414213562\ldots$
- $\sqrt{5} \approx 2{,}236067977\ldots$

Conjunto dos Números Reais ($\mathbb{R}$)

Os números reais, representados por **R** é a união dos conjuntos dos Racionais com os Irracionais. Ou seja,

$$Re\,a\,is \begin{cases} Racionais(\mathbb{Q}) \\ Irracionais(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \end{cases}$$

Exercícios de fixação

1. Qual proposição abaixo é verdadeira?

I. Todo número inteiro é racional e todo número real é um número inteiro.

II. A intersecção do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais tem 1 elemento.

III. O número 1,83333... é um número racional.

IV. A divisão de dois números inteiros é sempre um número inteiro.

a) I.
b) II.
c) III.
d) IV.

2. O valor da expressão abaixo, quando a = 6 e b = 9, é:

$$\frac{b}{\sqrt[3]{b-a^2}}$$

a) um número natural ímpar
b) um número que pertence ao conjunto dos números irracionais
c) não é um número real
d) um número inteiro cujo módulo é maior que 2

3. A soma entre os 10 sucessores de um número natural é igual a 155. Que número natural é esse?

a) 6
b) 7
c) 8
d) 9
e) 10

4. A soma entre dois números ímpares consecutivos é igual a 20. Qual é o primeiro desses números?

a) 4
b) 9
c) 11
d) 13
e) 15

5. Se a soma e o produto de dois números são, respectivamente, dois e cinco, podemos afirmar corretamente que:

a) os dois números são racionais.
b) os dois números são irracionais
c) um dos números é racional e o outro é irracional.
d) os dois números são complexos não reais.

Exercícios de vestibulares

1. Analise as informações abaixo:

V. O conjunto dos Números Naturais é subconjunto dos Números Inteiros.

VI. O conjunto dos Números Naturais é subconjunto dos Números Racionais.

VII. O conjunto dos Números Naturais é subconjunto dos Números Irracionais.

a) Apenas a afirmação I é verdadeira.

b) Apenas a afirmação II é verdadeira.

c) Apenas a afirmação I é verdadeira.

d) Apenas a afirmação I e II são verdadeiras.

e) Todas as afirmações são verdadeiras.

2. Em trabalhos com matemática, é mantido um contato permanente com o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais, que possui, como subconjuntos, o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, o conjunto $\mathbb{Z}$dos números inteiros, o $\mathbb{Q}$ dos números racionais e o dos números irracionais I. O conjunto dos númeroa reais também pode ser identificado por

a) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}$

b) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Q}$

c) $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Z}$

d) $I \cup \mathbb{Z}$

e) $I \cup \mathbb{Q}$

3. Sobre os números racionais $\frac{1}{11}$, $\frac{7}{33}$ e $\frac{14}{55}$, é correto afirmar que

a) Apenas dois desses números, em sua forma decimal, são representados por dízimas periódicas.

b) Apenas um desses números, em sua forma decimal, é representado por uma dízima periódica simples.

c) Os três números, em sua forma decimal, podem ser representados por dízimas periódicas tais que o período de cada uma delas é um número primo.

d) Os três números, em sua forma decimal, podem ser representados por dízimas periódicas tais que o período de cada uma delas é um número divisível por 3.

e) Os três números são irracionais.

4. No contexto da matemática recreativa, utilizando diversos materiais didáticos para motivar seus alunos, uma professora organizou um jogo com um tipo de baralho modificado, No início do jogo, vira-se uma carta do baralho na mesa e cada jogador recebe em mãos nove cartas. Deseja-se formar pares de cartas, sendo a primeira carta a da mesa e a segunda, uma carta na mão do jogador, que tenha um valor equivalente àquele descrito na carta da mesa. O objetivo do jogo é verificar qual jogador consegue o maior número de pares. Iniciado o jogo, a carta virada na mesa e as cartas da mão de um jogador são como no esquema:

Segundo as regras do jogo, quantas cartas da mão desse jogador podem formar um par com a carta da mesa?

a) 9

b) 7

c) 5

d) 4

e) 3

5. Indique qual dos conjuntos abaixo é constituído somente de números racionais.

a) $\{-1,2,\sqrt{2},\pi\}$

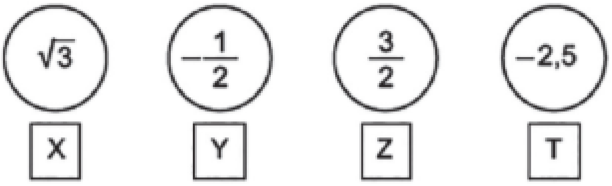
b) $\left\{-5,0,\frac{1}{2},\sqrt{9}\right\}$

c) $\left\{-2,0,\pi,\frac{2}{3}\right\}$

d) $\{\sqrt{3},\sqrt{64},9,\sqrt{2}\}$

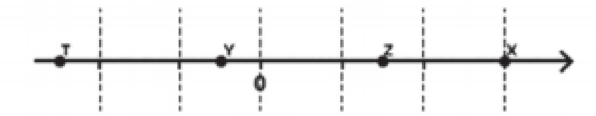
e) $\left\{-1,0,\sqrt{7},\frac{1}{3}\right\}$

6. Em um jogo educativo, o tabuleiro é uma representação da reta numérica e o jogador deve posicionar as fichas contendo números reais corretamente no tabuleiro, cujas linhas pontilhadas equivalem a 1 (uma) unidade de medida. Cada acerto vale 10 pontos.
Na sua vez de jogar, Clara recebe as seguintes fichas:

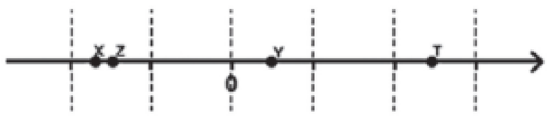


Para que Clara atinja 40 pontos nessa rodada, a figura que representa seu jogo, após a colocação das fichas no tabuleiro, é:

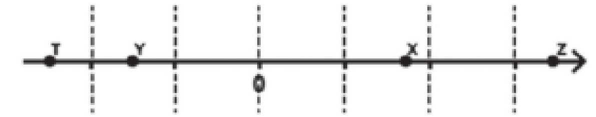
a)



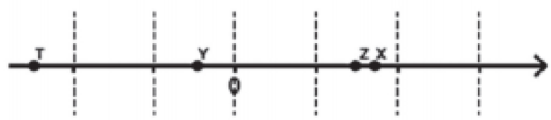
b)



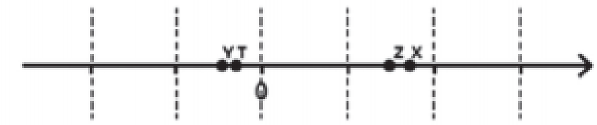
c)



d)



e)



7. Os números x e y são tais que $5 \leq x \leq 10$ e $20 \leq y \leq 30$. O maior valor possível de $\frac{x}{y}$ é:

a) 1/6
b) 1/4
c) 1/3
d) 1/2
e) 1

8. Se $\frac{p}{q}$ é a fração irredutível equivalente à dízima periódica 0,323232... , então q − p vale:

a) 64.
b) 67.
c) 68.
d) 69.
e) 71.

9. Um grupo de alunos cria um jogo de cartas em que cada uma apresenta uma operação com números racionais. O ganhador é aquele que obtiver um número inteiro como resultado da soma de suas cartas. Quatro jovens ao jogar receberam as seguintes cartas:

	1ª carta	2ª carta
Maria	$1,333... + \frac{4}{5}$	$1,2 + \frac{7}{3}$
Selton	$0,222... + \frac{1}{5}$	$0,3 + \frac{1}{6}$
Tadeu	$1,111... + \frac{3}{10}$	$1,7 + \frac{8}{9}$
Valentina	$0,666... + \frac{7}{2}$	$0,1 + \frac{1}{2}$

O vencedor do jogo foi:

a) Maria.

b) Selton.

c) Tadeu.

d) Valentina.

10. O número real x, que satisfaz 3 < x < 4, tem uma expansão decimal na qual os 999.999 primeiros dígitos à direita da vírgula são iguais a 3. Os 1.000.001 dígitos seguintes são iguais a 2 e os restantes são iguais a zero.

Considere as seguintes afirmações:

I. x é irracional.

II. $x \geq \frac{10}{3}$

III. $x \times 10^{2.000.000}$ é um inteiro par.

Então,

a) nenhuma das três afirmações é verdadeira.

b) apenas as afirmações I e II são verdadeiras.

c) apenas a afirmação I é verdadeira.

d) apenas a afirmação II é verdadeira.

e) apenas a afirmação III é verdadeira.

Gabaritos

Exercícios de fixação

1. **C**
   a) I. Falsa. Realmente todo número inteiro é racional, pois pode ser escrito na forma de fração. Por exemplo, o número - 7, que é inteiro pode ser escrito, na forma de fração, como -7/1. Contudo, nem todo número real é inteiro, por exemplo 1/2 não é um número inteiro.
   b) II. Falsa. O conjunto dos números racionais não possui nenhum número em comum com os irracionais, pois um número real ou é racional ou é irracional. Portanto, a intersecção é um conjunto vazio.
   c) III. **Verdadeira.** O número 1,83333... é um dízima periódica, pois o algarismo 3 se repete infinitamente. Esse número pode ser escrito na forma de fração como 11/6, portanto é um número racional.
   d) IV. Falsa. Por exemplo, 7 dividido por 3 é igual a 2,33333..., que é uma dízima periódica, logo não é um número inteiro.

2. **D**

$$\frac{b}{\sqrt[3]{b-a^2}} = \frac{9}{\sqrt[3]{9-6^2}} = \frac{9}{\sqrt[3]{9-36}} = \frac{9}{\sqrt[3]{-27}} = \frac{9}{-3} = -3$$

- A opção **a** está errada, pois a resposta é um número negativo que não faz parte do conjunto dos números naturais.
- O número - 3 não é um decimal não periódico infinito, portanto, não é um irracional, logo a letra **b** também não é a solução correta.
- A letra **c** também está errada, pois o número - 3 é um número pertencente ao conjunto dos números reais.
- A opção correta só pode ser a letra **d** e realmente o resultado da expressão é um número inteiro e o módulo de -3 é 3 que é maior que 2.

3. **E**
O sucessor de um número natural é obtido somando uma unidade a ele. Supondo que esse número natural é x, a soma entre seus 10 sucessores é:
$x + 1 + x + 2 + x + 3 + x + 4 + x + 5 + x + 6 + x + 7 + x + 8 + x + 9 + x + 10 = 155$
Observe que a proposta é encontrar a soma entre os sucessores do número – portanto, ele não entra nessa soma. Resolvendo essa equação, teremos:
$10x + 55 = 155$
$10x = 155 – 55$
$10x = 100$
$x = 100/10$
$x = 10$
O número natural procurado é 10.

4. **B**

Representamos um número ímpar qualquer por “**2n + 1**”.
Um número ímpar consecutivo de outro número ímpar é dado pelo acrescimo de 2 naturais, uma vez que é intercaldo com um número par. Logo o consecutivo ímpar de outro ímpar é dado por: “2n + 1 **+ 2”**
A questão diz que a soma resulta em 20. Logo:
2n + 1 + 2n + 1 + 2 = 20
4n + 4 = 20
4n = 20 – 4
4n = 16
n = 16/4
n = 4

O primeiro desses números ímpares é dado por 2n + 1.
Substituindo n por 4, temos então que a resposta da questão é:
(2 x 4) + 1 = 8 + 1 = 9

Logo, o primeiro desses números é o 9.

5. **D**

Sejam x e y os números, tem-se que

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x\cdot y=5 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} y=2-x \\ x(2-x)=5 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} y=2-x \\ 2x-x^2=5 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} y=2-x \\ -2x+x^2+1=-4 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} y=2-x \\ (x-1)^2=-4 \end{cases}$$

Logo, sabemos que $(x-1)^2 \geq 0$ para todo x real, podemos concluir que x não é real, ou seja, é um número complexo não real. Em consequência, y também é um complexo não real.

Exercícios de vestibulares

1. **D**

Considere a relação hierárquica dos conjuntos numéricos
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathrm{I}$
$\mathrm{I} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Analisando as afirmações:
I. Verdadeira, pois $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
II. Verdadeira, pois $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \Rightarrow \mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$
III. Falsa. Note que os números irracionais não possuem subconjuntos definidos segundo os conjuntos apresentados.

2. **E**

Como os números naturais também podem ser inteiros, e todas as opções dadas na questão são de união, a única alternativa correta é a que define o conjunto dos números reais como a união dos números racionais e irracionais ($\mathbb{Q} \cup l$)

3. **D**
Tem-se que $\frac{1}{11} = 0,\overline{09}, \frac{7}{33} = 0,\overline{21}\ e\ \frac{14}{55} = 0{,}25\overline{45}$. Em consequência, os três números, em sua forma decimal, são representados por dízimas periódicas, com o $0,\overline{09}\ e\ 0,\overline{21}$ sendo dízimas periódicas simples e $0{,}25\overline{45}$ uma dízima periódica composta. Ademais, os período dessas dízimas são: 9, 21 e 45, todos divisíveis por 3.

4. **E**
É imediato que $\frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0{,}75 = 75\%$. Portanto, a resposta é 3.

5. **B**
A resposta correta é B, pois todos os elementos do conjunto $\left\{-5, 0, \frac{1}{2}, \sqrt{9}\right\}$ podem ser escritos como fração: $-5 = -\frac{10}{2}$, : 0 = $-\frac{0}{3}, \frac{1}{2}, e\ \sqrt{9} = \frac{6}{2}$

6. **D**
Como $x = \sqrt{3} \cong 1{,}7;\ y = -\frac{1}{2} = -0{,}5$ e $z = \frac{3}{2} = 1{,}5$, tem-se t < y < z < x. Assim, a figura que representa o jogo de Clara é a da alternativa D. Note que na alternativa A, x=3.

7. **D**
Para o maior valor de x/y escolhe-se o maior valor para x e o menor para y logo 10/20 = ½

8. **B**
A dízima 0,3232... equivale a $\frac{32}{99}$ e 99-32=67

9. **C**
Maria teve a soma: $\frac{12}{9}$ (geratriz de 1,333...)+ $\frac{4}{5} + \frac{12}{10}$ (1,2 na forma de fração)+ $\frac{7}{3}$= $\frac{510}{9}$

Selton teve a soma: $\frac{2}{9} + \frac{1}{5} + \frac{3}{10} + \frac{1}{6}$= $\frac{8}{9}$

Tadeu teve a soma: $\frac{10}{9} + \frac{3}{10} + \frac{17}{10} + \frac{8}{9} = \frac{36}{9} = 4$

Valentina teve a soma: $\frac{2}{3} + \frac{7}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{2} = \frac{143}{90}$.

O único que teve como resposta um número inteiro foi Tadeu que foi o vencedor.

10. **E**
[I] Falsa. Como

$$x = 3,\underbrace{33\ldots3}_{999999}\underbrace{22\ldots2}_{1000001}000\ldots = 3,\underbrace{33\ldots3}_{999999}\underbrace{22\ldots2}_{1000001}$$

segue-se que x possui uma expressão decimal finita e, portanto, é um número racional.

[II] Falsa. Tem-se que

$$\frac{10}{3} = 3,\underbrace{33\ldots3}_{2000000}333\ldots > \underbrace{33\ldots3}_{999999}\underbrace{22\ldots2}_{1000001}000\ldots = x.$$

[III] Verdadeira. De (I), sabemos que $3,\underbrace{33\ldots3}_{999999}\underbrace{22\ldots2}_{1000001}$. Logo,

$$\begin{aligned} x \cdot 10^{2000000} &= 3,\underbrace{33\ldots3}_{999999}\underbrace{22\ldots2}_{1000001} \cdot 10^{2000000} \\ &= \underbrace{33\ldots3}_{1000000}\underbrace{22\ldots2}_{1000001}, \end{aligned}$$